

Rezolvare

1.a. $f'(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 2$

b. $f'(x) = e^x + e^{-x} \Rightarrow f'(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ crescătoare pe \mathbb{R} .

c. Avem funcția $g(x) = 2e^{-x}$. Atunci $S = 2(1 + e^{-1} + e^{-2} + \dots + e^{-2009}) = 2 \frac{e^{-2010} - 1}{e^{-1} - 1} = 2 \frac{e^{2010} - 1}{e^{2009}(e - 1)}$.

2.a. F derivabilă pe \mathbb{R} și $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow F$ este primitivă pentru f .

b. $f(x) \geq 0, \forall x \in [0; 1] \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_f) = \int_0^1 f(x) dx = F(x) \Big|_0^1 = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1$.

c. $\int_1^x \frac{f(t)f''(t) - [f'(t)]^2}{f^2(t)} dt = \int_1^x \left(\frac{f'(t)}{f(t)} \right)' dt = \left(\frac{f'}{f} \right)(t) \Big|_1^x = \frac{t+1}{t} \Big|_1^x = \frac{x+1}{x} - 2$, unde $f'(x) = (x+1)e^x$.