Rezolvare

1.a. $f'(x)=\dfrac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}}$

b. $f'(x)=0\Rightarrow x=e^2$. Din tabelul de variație rezultă că f este crescătoare pe $\left(0,e^2\right]$ și f descrescătoare pe $\left[e^2,+\infty\right)$.

c. Din tabelul de variație rezultă că f este crescătoare pe intervalul $\left(0,e^2\right]$

$\Rightarrow f(3)\le f(5)\Rightarrow \dfrac{\ln 3}{\sqrt{3}}\le\dfrac{\ln 5}{\sqrt{5}}\Rightarrow \sqrt{5}\ln 3\le\sqrt{3}\ln 5\Rightarrow 3^{\sqrt{5}}\le 5^{\sqrt{3}}$.

2.a. $\lim\limits_{x\nearrow -1} f(x)=\lim\limits_{x\searrow -1} f(x)=f(-1)=1\Rightarrow f$ continuă în $x=-1$. În plus, f continuă pe $(-\infty,-1)$ și pe $(-1,+\infty)$, rezultă că f este continuă pe $\mathbb{R}$. Deci f admite primitive pe $\mathbb{R}$.

b. $V=\pi\int\limits_0^2 g^2(x)\,dx=\pi\int\limits_0^2 (2+x)^2\,dx=\pi\left.\dfrac{(2+x)^3}{3}\right|_0^2=\dfrac{56\pi}{3}$.

c. $\int\limits_{-2}^{0}\dfrac{x\cdot f(x)}{e}dx=\int\limits_{-2}^{-1}\dfrac{xe^x\cdot e}{e}dx+\int\limits_{-1}^{0}\dfrac{(2x+x^2)}{e}dx=(x-1)e^x\Big|_{-2}^{-1}+\dfrac{1}{e}\left(x^2+\dfrac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{0}=\dfrac{9-8e}{3e^2}$.