

Soluții

1.a. Avem $f'(x) = 1 - e^{-x}$.

b. $f'(x) = 1 - e^{-x}$; $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$. Din tabelul de variație obținem f descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ și f crescătoare pe $[0, \infty)$.

c. Din $m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ și $n = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0 \Rightarrow y = x$ ecuația asimptotei oblice la $+\infty$.

2.a. $\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 (x^3 + 3x) dx = \frac{7}{4}$.

b. $\int_1^a (g(x) - x^3) \cdot e^x dx = 3 \int_1^a x e^x dx = 3e^a (a - 1) = 6e^a \Rightarrow a = 3$.

c. $\int_0^1 (3x^2 + 3) \cdot g^{2009}(x) dx = \int_0^1 g^{2009}(x) \cdot g'(x) dx = \frac{4^{2010}}{2010}$.