Soluții

1.a. Avem $f'(x) = 2009x^{2008} - 2009$. Obținem $f(0) = 2008$, $f'(0) = -2009 \Rightarrow f(0) + f'(0) = -1$.

b. Ecuația tangentei: $y - f(1) = f'(1)(x-1)$ și $f(1) = 0,\ f'(1) = 0$ obținem ecuația $y = 0$.

c. $f''(x) = 2009 \cdot 2008x^{2007} \Rightarrow f''(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;\infty)$. Deci f este convexă pe $[0;\infty)$.

2.a. $f(x) \geq 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow$ Aria $(\Gamma_f) = \int_0^1 (x + e^{-x})dx = \frac{3e-2}{2e}$.

b. Din $e^{-x^2} \geq 1 - x^2,\ \forall x \in \mathbb{R}$, integrăm relația pe $[0,1] \Rightarrow \int_0^1 e^{-x^2}dx \geq \left(x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}$, deci $\int_0^1 e^{-x^2}dx \geq \frac{2}{3}$.

c. $g(x) = e^{-x} + e^x$ obținem $V(C_g) = \pi \int_0^1 g^2(x)dx = \pi \int_0^1 (e^{-2x} + e^{2x} + 2)dt = \frac{\left(e^2 - e^{-2} + 4\right)\pi}{2}$.