Soluții

1.a. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}+\frac{x}{x+2}\right) = 2$.

b. Din $\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2}$ şi $\left(\frac{x+1}{x+2}\right)' = \frac{1}{(x+2)^2}$. Avem $f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+2)^2}$.

c. Din $f(0) = \frac{1}{2}$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ şi f crescătoare pe $[0,\infty)$ obținem $\frac{1}{2} \le f(x) \le 2,\ \forall x \in [0,\infty)$.

2.a. Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$. F este crescătoare pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \ge 0$, adevărat pentru $\forall x\in\mathbb{R}$.

b. $\int_0^1 x\cdot f(x)dx = \int_0^1\left(x^3+x+xe^x\right)dx = \frac{7}{4}$.

c. $\int_1^e \frac{f(\ln x)}{x}dx = \int_1^e\left(F(\ln x)\right)' dx = F(1)-F(0) = e+\frac{1}{3}$.