Rezolvare

1.a. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)$. Avem $f'(x)=e^x+2x$. Deci limita este egală cu $e+2$.

b. Din $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=+\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă orizontală către $+\infty$

Din $m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^x+x^2}{x}=+\infty \Rightarrow$ nu există asimptotă oblică către $+\infty$

c. $f''(x)=e^x+2 \Rightarrow f''(x)\geq 0,\ \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow f$ convexă pe $\mathbb{R}$.

2.a. $\int_1^e f'(x)dx=f(x)\Big|_1^e=f(e)-f(1)=\dfrac{1-2e}{2e}$.

b. F este primitivă pentru $f \Rightarrow F'(x)=f(x),\ \forall x\in\mathbb{R}$ și $f(x)>0,\ \forall x\geq 1 \Rightarrow F$ crescătoare pe $[1,+\infty)$.

c. $f(x)>0,\ \forall x\in\left[1;e^2\right) \Rightarrow$ aria $\left(\Gamma_f\right)=\int_a^{e^2} f(x)dx=\ln(1+\ln x)\Big|_a^{e^2}=\ln 3-\ln(1+\ln a)=\ln\dfrac{3}{1+\ln a}$.

Dar, aria $\left(\Gamma_f\right)=\ln\dfrac{3}{2}$, deci obținem $a=e\in\left(1;e^2\right)$.