

Rezolvare

1.a. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} e^x x^2 = +\infty$

b. Din $f'(x) = e^x [ax^2 + (2a+b)x + b + c]$, $f(0) = c$, $f'(0) = b + c \Rightarrow f'(0) - f(0) = b$

c.

$f''(x) = e^x [ax^2 + (4a+b)x + 2a + 2b + c] \Rightarrow 2a + 2b + c = 4$; $f(0) = 0$, $c = 0$, $f'(0) = 1$, $b + c = 1$
 $\Rightarrow a = 1$, $b = 1$, $c = 0$.

2.a. $I_1 = \int_0^1 \frac{x+1}{x+1} dx = \int_0^1 1 dx = x \Big|_0^1 = 1$.

b. Din $x^2 \leq x$, $\forall x \in [0,1] \Rightarrow \frac{x^2+1}{x+1} \leq \frac{x+1}{x+1}$, $\forall x \in [0,1]$ și integrând pe $[0,1]$ obținem relația cerută.

c. $I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)+2}{x+1} dx = \int_0^1 x^n dx + \int_0^1 \frac{2}{x+1} dx = \frac{1}{n+1} + 2 \ln 2$.