Rezolvare

1.a. $f'(x)=\dfrac{e^x(x+1)-e^x}{(x+1)^2}=\dfrac{xe^x}{(x+1)^2}$.

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{e^{-x}(x+1)}=0\Rightarrow y=0$ ecuația asimptotei orizontale la $-\infty$.

c. Din $f'(x)=\dfrac{xe^x}{(1+x)^2}$, $f'(x)=0 \Rightarrow x=0$, punct de minim şi din tabelul de variație $\Rightarrow f(x)\geq f(0)$
$\Rightarrow 1\leq f(x),\ \forall x>-1$.

2.a. $I_0=\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=\ln x\Big|_e^{e^2}=1$

b. $I_1=\int_e^{e^2}\frac{\ln x}{x}dx=\frac{\ln^2 x}{2}\Big|_e^{e^2}=\frac{3}{2}$.

c. $1\leq \ln^n x\leq 2^n \Rightarrow \int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx\leq\int_e^{e^2}\frac{\ln^n x}{x}dx\leq\int_e^{e^2}\frac{2^n}{x}dx.$ Dar $I_n=\frac{\ln^{n+1}x}{n+1}\Big|_e^{e^2}=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$ şi $\int_e^{e^2}\frac{1}{x}dx=1 \Rightarrow$ relația cerută.