Rezolvare

1. a. $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}\Rightarrow f'(e)=0.$

b. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0 \Rightarrow y=0$ ecuația asimptotei orizontale la $+\infty$.

c. $f'(x)=0\Rightarrow x=e$ punct de maxim şi din tabelul de variație al funcției $\Rightarrow f(x)\le f(e),\ \forall x\in(0,\infty)\Rightarrow$

$\dfrac{\ln x}{x}\le\dfrac{\ln e}{e}\Rightarrow e\ln x\le x\ln e\Rightarrow x^e\le e^x,\ \forall x>0$.

2.a. $\int\limits_0^4 f^2(x)dx=\left(16x-\dfrac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=\dfrac{128}{3}$.

b. $\int\limits_{-1}^{1}\dfrac{x}{\sqrt{16-x^2}}dx=-\sqrt{16-x^2}\,\Bigg|_{-\sqrt5}^{\sqrt5}=0$.

c. Avem $0\le\sqrt{16-x^2}\le 4$. Integrăm pe $[0,m]$ şi obținem

$0\le\int\limits_0^m f(x)dx\le 4x\Bigg|_0^m\Rightarrow 0\le\int\limits_0^m f(x)dx\le 4m\le 8$, pentru $m\in[0;2]$.