

Rezolvare

1.a. $f'(x) = \frac{e^x x^2 - 2xe^x}{x^4} = \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4} = \frac{e^x(x-2)}{x^3}.$

b. $f'(x) = \frac{e^x(x^2 - 2x)}{x^4}$ deci f descrescătoare pe $(0, 2]$.

c. Din f descrescătoare pe $(0, 2] \Rightarrow f(\sqrt{2}) \geq f(\sqrt{3}) \Rightarrow \frac{e^{\sqrt{2}}}{2} \geq \frac{e^{\sqrt{3}}}{3}.$

2.a. $\int_1^2 (x - f(x) + \ln x)^2 dx = \int_1^2 (2x)^2 dx = \frac{4x^3}{3} \Big|_1^2 = \frac{28}{3}.$

b. F primitivă pentru $f \Rightarrow F''(x) = f'(x); F''(x) = \frac{1-x}{x} \Rightarrow F''(x) \leq 0, \forall x > 1 \Rightarrow F$ concavă pe $(1, +\infty).$

c. $h(x) = \ln x \geq 0, \forall x \in [1; e] \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_h) = \int_1^e h(x) dx = \int_1^e \ln x dx = x(\ln x - 1) \Big|_1^e = 1.$