

Rezolvare

1.a. $f'(x) = \frac{x-e}{x}$.

b. Din $f'(x) = \frac{x-e}{x} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{f'(x)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{x-e \ln x}{\frac{x-e}{x}} = \lim_{x \rightarrow e} x \left(\frac{x-e \ln x}{x-e} \right) = 0$.

c. Din $f'(x) = 0 \Rightarrow x = e$ și din tabelul de variație, obținem f descrescătoare pe $(0, e]$ și f crescătoare pe $[e, \infty)$.

2.a. $\int_2^e \left(f(x) - \frac{1}{x-1} \right) dx = \int_2^e \left(\frac{1}{x} \right) dx = \ln x \Big|_2^e = 1 - \ln 2$

b. $F''(x) = f'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{(x-1)^2} < 0, x \geq 2 \Rightarrow F$ concavă pe $[2; +\infty)$.

c. $f(x) > 0, \forall x \in [2; +\infty) \Rightarrow \text{aria } \Gamma_f = \int_2^a f(x) dx = \ln \frac{a(a-1)}{2} \Rightarrow \ln \frac{a(a-1)}{2} = \ln 3 \Rightarrow a = 3$.