

Rezolvare

1.a. $f'(x) = \frac{x^4 - 1}{x}.$

b. Din $f'(x) = \frac{x^4 - 1}{x} \Rightarrow f'(x) = 0$ și $x \in (0; +\infty) \Rightarrow x = 1$ și f descrescătoare pe $(0, 1]$ și crescătoare pe $[1, \infty)$ obținem $x = 1$ este punct de extrem.

c. Din $f(x) \geq f(1), \forall x > 0 \Rightarrow f(\sqrt{x}) \geq f(1) \Rightarrow \frac{x^2}{4} - \ln \sqrt{x} \geq \frac{1}{4}.$

2.a. $I_0 = \int_1^2 e^x dx = e^x \Big|_1^2 = e^2 - e.$

b. $I_1 = \int_1^2 x e^x dx = e^x (x - 1) \Big|_1^2 = e^2.$

c. $I_{n+1} = \int_1^2 x^{n+1} e^x dx = x^{n+1} e^x \Big|_1^2 - (n+1) \int_1^2 x^n e^x dx = 2^{n+1} e^2 - e - (n+1) I_n \Rightarrow I_{n+1} + (n+1) I_n = e(2^{n+1} e - 1).$