Soluție

1.a) $f'(x)=e^x-1,$ pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) $f'(x)=0\Rightarrow e^x=1\Rightarrow x=0$. Din tabelul de variație rezultă că f este descrescătoare pe $(-\infty;0]$ și crescătoare pe $[0;+\infty)$.

c) Din tabelul de variație obținem că $O(0,0)$ este punct de minim al funcției $f\Rightarrow f(x)\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow e^x\ge x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{x^2}\ge x^2+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{x^2}+e^x\ge x^2+x+2$.

2.a) Funcția g este derivabilă pe $(0,+\infty)$ și $g'(x)=(x\cdot\ln x)'=1+\ln x=f(x),\ \forall x>0$. Funcția g este o primitivă a funcției f.

b) Avem $\int_1^e f(x)\cdot g(x)\,dx\overset{\text{cf.a)}}{=}\int_1^e g'(x)\cdot g(x)\,dx=\left.\frac{g^2(x)}{2}\right|_1^e=\frac{e^2}{2}$.

c) $g(x)\ge 0,\ \forall x\in[1;e]\Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_g)=\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

.