Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) $f'(x)=\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{(\ln x)'\cdot x-(\ln x)\cdot x'}{x^2}=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}=\frac{1-\ln x}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b). $f'(x)=0\Rightarrow 1-\ln x=0\Rightarrow x=e\in(0,+\infty)$. Din tabelul de variație f este descrescătoare pe $[e;+\infty)$ şi crescătoare pe $(0;e]$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}0$. Dreapta de ecuație $y=0$ este asimptotă orizontală la G_f spre $+\infty$.

2. a) $\int f(x)dx=\int\left(x^{1004}+2009^x\right)dx=\frac{x^{1005}}{1005}+\frac{2009^x}{\ln 2009}+\mathcal{C}$.

b) Dacă $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f, atunci $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$.

Funcția F este crescătoare pe $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow$ derivata ei, adică funcția f, este pozitivă pe $\mathbb{R}$.

Cum $f(x)=x^{1004}+2009^x\ge 0,\forall x\in\mathbb{R}$ (suma a două funcții pozitive), rezultă că F este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Înlocuind în definiția funcției f pe x cu x^2, integrala de calculat devine succesiv:

$$\int_0^1 x\cdot f\left(x^2\right)dx=\int_0^1 x^{2009}\,dx+\int_0^1 x\cdot 2009^{x^2}\,dx\underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2}{=}}\left.\frac{x^{2010}}{2010}\right|_0^1+\frac{1}{2}\int_0^1 u'(x)\cdot 2009^{u(x)}\,dx=\frac{1}{2010}+\frac{1}{2}\cdot\left.\frac{2009^{x^2}}{\ln 2009}\right|_0^1=$$

$$=\frac{1}{2010}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2008}{\ln 2009}.$$