

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

$$\left. \begin{aligned} f_s(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \left(\frac{1}{e} \cdot e^x - 1 \right) = 0 \\ f_d(1) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} (\ln x) = 0 \\ f(1) &= \frac{1}{e} \cdot e^1 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \text{funcția } f \text{ este continuă în } x_0 = 1.$$

b) Deoarece $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{e} \cdot e^x - 1 \right) = -1 \in \mathbb{R}$ rezultă că dreapta de ecuație $y = -1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f .

c) Avem: $f'(x) = \frac{1}{x}$, $\forall x > 1$ și $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, $\forall x \in (1, +\infty)$. Deci f este concavă pe $(1, +\infty)$.

$$\text{2. a) } \int_0^1 (x^2 + 1) f(x) dx = \int_0^1 (x^2 + 2x + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2 + x \right) \Big|_0^1 = \frac{7}{3}.$$

$$\text{b) } f(x) = 1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 + \frac{2x}{x^2 + 1} \right) dx \stackrel{\substack{u(x)=x^2+1 \\ u'(x)=2x}}{=} \int_0^1 1 dx + \int_0^1 \frac{u'(x)}{u(x)} dx = x \Big|_0^1 + \ln |u(x)| \Big|_0^1 = \ln(2e).$$

$$\text{c) } \int_0^1 f'(x) \cdot e^{f(x)} dx = e^{f(x)} \Big|_0^1 = e(e-1).$$