

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1.a) Avem $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$. $f'(x) = 1 - \frac{1}{x}$, $\forall x > 0 \Rightarrow f'(1) = 1 - \frac{1}{1} = 0$. Prin urmare $f(1) - f'(1) = 1 - 0 = 1$.

b) $f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = 0 \Rightarrow x = 1 \in (0, +\infty)$. Din tabelul de variație rezultă că f este descrescătoare pe $(0; 1]$ și crescătoare pe $[1; \infty)$. Așadar $x = 1$ este punct de minim al funcției f .

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln x}{x} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

2.a) $I + J = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx + \int_0^1 \frac{xe^x}{x+1} dx = \int_0^1 \frac{(x+1)e^x}{x+1} dx = e - 1$.

b) Din ipoteză $e^x \geq x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$ $\xRightarrow{x+1>0}$ $\frac{xe^x}{x+1} \geq \frac{x(x+1)}{x+1} = x$. Integrând inegalitatea pe intervalul $[0, 1]$ pentru $x \in [0, 1]$

obținem $J \geq \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}$.

c) Avem $I = \int_0^1 \frac{e^x}{x+1} dx = \int_0^1 (e^x)' \cdot \frac{1}{x+1} dx \stackrel[\text{prin părți}]{\text{metoda integrării}} \frac{e^x}{x+1} \Big|_0^1 + \int_0^1 e^x \cdot \frac{1}{(x+1)^2} dx = \frac{e-2}{2} + \int_0^1 \frac{e^x}{(x+1)^2} dx$.