Soluție

1.a) Avem $f(1)=1-\ln 1=1$. $f'(x)=1-\dfrac{1}{x},\ \forall x>0 \Rightarrow f'(1)=1-\dfrac{1}{1}=0$. Prin urmare $f(1)-f'(1)=1-0=1$.

b) $f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=0 \Rightarrow x=1\in(0,+\infty)$. Din tabelul de variație rezultă că f este descrescătoare pe $(0;1]$ şi crescătoare pe $[1;\infty)$. Aşadar $x=1$ este punct de minim al funcției f.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-\ln x}{x}=-\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$.

2.a) $I+J=\int_0^1\dfrac{e^x}{x+1}dx+\int_0^1\dfrac{xe^x}{x+1}dx=\int_0^1\dfrac{(x+1)e^x}{x+1}dx=e-1$.

b) Din ipoteză $e^x\ge x+1,\ \forall x\in\mathbb{R}\ \underset{\text{pentru } x\in[0,1]}{\overset{x+1>0}{\Rightarrow}}\ \dfrac{xe^x}{x+1}\ge\dfrac{x(x+1)}{x+1}=x$. Integrând inegalitatea pe intervalul $[0,1]$ obținem $J\ge\int_0^1 x\,dx=\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^1=\dfrac{1}{2}$.

c) Avem $I=\int_0^1\dfrac{e^x}{x+1}dx=\int_0^1\left(e^x\right)'\cdot\dfrac{1}{x+1}dx\ \underset{\text{prin părți}}{\overset{\text{metoda integrării}}{=}}\ \left.\dfrac{e^x}{x+1}\right|_0^1+\int_0^1 e^x\cdot\dfrac{1}{(x+1)^2}dx=\dfrac{e-2}{2}+\int_0^1\dfrac{e^x}{(x+1)^2}dx$.