

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0)$. $f'(x) = (x^2 + e^x)' = 2x + e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Limita cerută este egală cu $2 \cdot 0 + e^0 = 1$.

b) $f'(x) = 2x + e^x \Rightarrow f''(x) = (f'(x))' = (2x + e^x)' = 2 + e^x, \forall x \in \mathbb{R}$. Cum $e^x > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, rezultă că $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci funcția f este convexă pe \mathbb{R} .

c) $2x + e^x - (2 + e^x) + x^2 + e^x = e^x - 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = -1$.

2. a) $I_1 = \int_0^1 x(1+x)^1 dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 + \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

b) Conform ipotezei $(1+x)^n \leq (1+x)^{n+1}, \forall x \in [0,1]$ și $\forall n \in \mathbb{N}$. Prin înmulțirea acestei inegalități cu $x > 0$ obținem $x(1+x)^n \leq x(1+x)^{n+1}$ (cazul $x=0$ verifică și el inegalitatea). Integrând această inegalitate pe $[0,1]$ obținem $I_n \leq I_{n+1}$, pentru oricare $n \in \mathbb{N}$, de unde $I_{2009} \geq I_{2008}$.

c) Utilizând identitatea dată obținem $I_n = \int_0^1 x(1+x)^n dx = \int_0^1 \left((1+x)^{n+1} - (1+x)^n \right) dx =$

$$\begin{aligned} & \stackrel{u(x)=1+x}{=} \int_0^1 u'(x) \cdot u^{n+1}(x) dx - \int_0^1 u'(x) \cdot u^n(x) dx = \left. \frac{(1+x)^{n+2}}{n+2} \right|_0^1 - \left. \frac{(1+x)^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \frac{n \cdot 2^{n+1} + 1}{(n+1)(n+2)}. \end{aligned}$$