

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1.a) $f'(x) = (x^2 \ln x)' = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \ln x + 1), \forall x > 0.$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x \ln x} \stackrel{\text{cf. pct.a)}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2 \ln x + 1)}{x \ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x + 1}{\ln x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{\ln x} \right) = 2.$

c) $f'(x) = 0 \Rightarrow x(2 \ln x + 1) = 0 \Rightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = e^{-\frac{1}{2}} \in (0, +\infty).$ Din tabelul de variație rezultă că

$A\left(e^{-\frac{1}{2}}, -\frac{1}{2e}\right)$ este punctul de minim al funcției f . Deci $f(x) \geq -\frac{1}{2e}$, oricare ar fi $x > 0$.

2. a) Avem $\int_0^1 f(x) e^{-x} dx = \int_0^1 x e^x \cdot e^{-x} dx = \int_0^1 x dx = \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$

b) $f'(x) = (x e^x)' = (x+1)e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$ $\int_0^1 f''(x) dx = \int_0^1 (f'(x))' dx = f'(x) \Big|_0^1 = f'(1) - f'(0) = 2e - 1.$

c) Avem $\int_1^2 \frac{f(x^2)}{x} dx = \int_1^2 x e^{x^2} dx \stackrel{\substack{u(x)=x^2 \\ u'(x)=2x}}{=} \frac{1}{2} \int_1^2 u'(x) \cdot e^{u(x)} dx = \frac{1}{2} e^{u(x)} \Big|_1^2 = \frac{e(e^3 - 1)}{2}.$