Soluție

1. a) $f'(x)=\left(x-\frac{1}{e^x}\right)'=1+\frac{1}{e^x}\Rightarrow f'(0)=1+\frac{1}{e^0}=2$. $f(0)=0-\frac{1}{e^0}=-1$. Deci $f(0)+f'(0)=-1+2=1$.

b) Limita cerută este egală cu $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}=1$.

c) $f'(x)=1+\frac{1}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f''(x)=\left(1+\frac{1}{e^x}\right)'=-\frac{1}{e^x},\forall x\in\mathbb{R}$. Din faptul că $e^x>0,\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f''(x)<0,\forall x\in\mathbb{R}$, adică f este concavă pe $\mathbb{R}$.

2. a) $\int f(x)\,dx=\int(1-x)\,dx=x-\frac{x^2}{2}+\mathcal{C}$.

b) $V=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left(1-2x+x^2\right)dx=\pi\left(x-x^2+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1=\frac{\pi}{3}$.

c) $(x+1)g(x)=1-x^{2010},\ \forall x\in[0,1]$, $\int_0^1(x+1)g(x)\,dx=\int_0^1\left(1-x^{2010}\right)dx=\left(x-\frac{x^{2011}}{2011}\right)\Bigg|_0^1=1-\frac{1}{2011}<1$.