

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) $f'(x) = \left(x - \frac{1}{e^x}\right)' = 1 + \frac{1}{e^x} \Rightarrow f'(0) = 1 + \frac{1}{e^0} = 2$. $f(0) = 0 - \frac{1}{e^0} = -1$. Deci $f(0) + f'(0) = -1 + 2 = 1$.

b) Limita cerută este egală cu $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1$.

c) $f'(x) = 1 + \frac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) = \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)' = -\frac{1}{e^x}, \forall x \in \mathbb{R}$. Din faptul că $e^x > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f''(x) < 0, \forall x \in \mathbb{R}$, adică f este concavă pe \mathbb{R} .

2. a) $\int f(x) dx = \int (1-x) dx = x - \frac{x^2}{2} + C$.

b) $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 (1-2x+x^2) dx = \pi \left(x - x^2 + \frac{x^3}{3}\right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{3}$.

c) $(x+1)g(x) = 1 - x^{2010}, \forall x \in [0,1], \int_0^1 (x+1)g(x) dx = \int_0^1 (1 - x^{2010}) dx = \left(x - \frac{x^{2011}}{2011}\right) \Big|_0^1 = 1 - \frac{1}{2011} < 1$.