Soluție

1.a) $f'(x)=-\dfrac{2e^x\left(x+e^x\right)-2e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=\dfrac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1-\dfrac{2e^x}{x+e^x}\right)=-1\Rightarrow$ dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală la G_f spre $+\infty$.

c) $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}=0\Rightarrow x=1\in[0,+\infty)$. Din tabelul de variație al funcției f deducem că este punctul de maxim. Cum $f(1)=\dfrac{1-e}{1+e}$ și $f(0)=-1$ și $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\overset{cf.b)}{=}-1$, obținem

$-1\le f(x)\le\dfrac{1-e}{1+e},\ \forall x\ge 0$.

2.a) $I_1=\displaystyle\int_0^1\frac{x}{x+1}\,dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx\underset{u'(x)=1}{\overset{u(x)=x+1}{=}}\int_0^1\left(1-\frac{u'(x)}{u(x)}\right)dx=\left(x-\ln\left|u(x)\right|\right)\Big|_0^1=1-\ln 2$.

b) $I_{n+1}+I_n=\displaystyle\int_0^1\left(\frac{x^{n+1}}{x+1}+\frac{x^n}{x+1}\right)dx=\int_0^1\frac{x^n(x+1)}{x+1}\,dx=\int_0^1 x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1=\frac{1}{n+1}$.

c) $\displaystyle\int_0^1\frac{x^n}{2}\,dx\le\int_0^1\frac{x^n}{x+1}\,dx\le\int_0^1 x^n\,dx\Rightarrow\frac{x^{n+1}}{2(n+1)}\Big|_0^1\le I_n\le\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big|_0^1\Rightarrow\frac{1}{2(n+1)}\le I_n\le\frac{1}{n+1}\overset{n=2009}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow\dfrac{1}{2\cdot 2010}\le I_{2009}\le\dfrac{1}{2010}\Rightarrow\dfrac{1}{2}\le 2010\cdot I_{2009}\le 1.$