

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

Soluție

$$1.a) f'(x) = -\frac{2e^x(x+e^x) - 2e^x(1+e^x)}{(x+e^x)^2} = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2e^x}{x+e^x}\right) = -1 \Rightarrow \text{dreapta de ecuație } y = -1 \text{ este asimptotă orizontală la } G_f \text{ spre } +\infty.$$

$$c) f'(x) = \frac{2e^x(1-x)}{(x+e^x)^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \in [0, +\infty). \text{ Din tabelul de variație al funcției } f \text{ deducem că este punctul de}$$

maxim. Cum $f(1) = \frac{1-e}{1+e}$ și $f(0) = -1$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \stackrel{cf. b)}{=} -1$, obținem

$$-1 \leq f(x) \leq \frac{1-e}{1+e}, \forall x \geq 0.$$

$$2.a) I_1 = \int_0^1 \frac{x}{x+1} dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx \stackrel{u(x)=x+1}{u'(x)=1} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u'(x)}{u(x)}\right) dx = \left(x - \ln|u(x)|\right) \Big|_0^1 = 1 - \ln 2.$$

$$b) I_{n+1} + I_n = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{x+1} + \frac{x^n}{x+1}\right) dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{x+1} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

$$c) \int_0^1 \frac{x^n}{2} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{x+1} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Rightarrow \frac{x^{n+1}}{2(n+1)} \Big|_0^1 \leq I_n \leq \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_0^1 \Rightarrow \frac{1}{2(n+1)} \leq I_n \leq \frac{1}{n+1} \stackrel{n=2009}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2 \cdot 2010} \leq I_{2009} \leq \frac{1}{2010} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq 2010 \cdot I_{2009} \leq 1.$$