Soluție

1. a) $f'(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 5.$

c) f' este crescătoare pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)' = f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .Cum $f''(x) = \left((x^2 + 4x + 5)e^x\right)' =$

$= (x+3)^2 e^x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$ rezultă concluzia.

2. a) Relația de demonstrat este echivalentă cu a arăta că $f'(x) = g(x),\ \forall x > 0$. Avem

$f'(x) = \left(x^2 + x \ln x\right)' = 2x + \ln x + 1 = g(x),\ \forall x \in (0, +\infty)$

b) Avem $\int_1^e f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_1^e f(x) \cdot f'(x)\, dx = \left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_1^e = \dfrac{\left(e^2 + e\right)^2 - 1}{2}$.

c) Pentru $x \in [1, e]$ rezultă că $\ln x \geq 0$. Deci $f(x) > 0, \forall x \in [1, e]$.

Așadar $\text{Aria}\left(\Gamma_f\right) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e x \ln x\, dx = \dfrac{4e^3 + 3e^2 - 1}{12}$.

.