

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) $f'(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = f'(0) = 5.$

c) f' este crescătoare pe $\mathbb{R} \Leftrightarrow (f'(x))' = f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}.$ Cum $f''(x) = (x^2 + 4x + 5)e^x = (x+3)^2 e^x \geq 0, \forall x \in \mathbb{R},$ rezultă concluzia.

2. a) Relația de demonstrat este echivalentă cu a arăta că $f'(x) = g(x), \forall x > 0.$ Avem

$$f'(x) = (x^2 + x \ln x)' = 2x + \ln x + 1 = g(x), \forall x \in (0, +\infty)$$

b) Avem $\int_1^e f(x) \cdot g(x) dx = \int_1^e f(x) \cdot f'(x) dx = \frac{f^2(x)}{2} \Big|_1^e = \frac{(e^2 + e)^2 - 1}{2}.$

c) Pentru $x \in [1, e]$ rezultă că $\ln x \geq 0.$ Deci $f(x) > 0, \forall x \in [1, e].$

$$\text{Așadar } \text{Aria}(\Gamma_f) = \int_1^e f(x) dx = \int_1^e x^2 dx + \int_1^e x \ln x dx = \frac{4e^3 + 3e^2 - 1}{12}.$$