

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) Avem $f'(x) = \left((x^2 - 3x - 3)e^x \right)' = (x^2 - 3x - 3)' e^x + (x^2 - 3x - 3)(e^x)' =$
 $= (2x - 3)e^x + (x^2 - 3x - 3)e^x = (x^2 - x - 6)e^x, \forall x \in \mathbb{R}.$

b) Avem $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - 3x - 3)e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 3x - 3}{e^{-x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x - 3}{-e^{-x}} \stackrel{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{e^{-x}} = 0.$

Deci dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală la G_f către $-\infty$.

c) Cerința este echivalentă cu a arăta că panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă

$x_0 = -2$ este 0, adică $f'(-2) = 0$. Avem $f'(x) \stackrel{cf. a)}{=} (x^2 - x - 6)e^x$. Prin urmare $f'(-2) = 0$.

2. a) f este continuă pe $(-\infty, 0)$ și pe $(0, +\infty)$ (operații cu funcții continue).

Studiem continuitatea funcției f în $x_0 = 0$:

$$f_s(0) = \lim_{x \nearrow 0} (x + 2) = 2; f_d(0) = \lim_{x \searrow 0} (e^x + 1) = 2; f(0) = e^0 + 1 = 2 \Rightarrow f \text{ este continuă și în } x_0 = 0.$$

Prin urmare f este continuă pe \mathbb{R} , deci admite primitive pe \mathbb{R} .

b) $\int_{-1}^1 f(x) dx = \int_{-1}^0 (x + 2) dx + \int_0^1 (e^x + 1) dx = e + \frac{3}{2}.$

c) $x^2 \geq 0 \Rightarrow f(x^2) = e^{x^2} + 1, \forall x \in \mathbb{R}$. Deci $\int_0^1 x \cdot f(x^2) dx = \int_0^1 x \cdot (e^{x^2} + 1) dx = \int_0^1 x \cdot e^{x^2} dx + \int_0^1 x dx =$

$$\stackrel{u(x)=x^2}{=} \stackrel{u'(x)=2x}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 u'(x) \cdot e^{u(x)} dx + \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \cdot e^{u(x)} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot e^{x^2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} = \frac{e}{2}.$$