

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1.a) Avem $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{1 - \ln 1}{1 + \ln 1} = 1.$

b) $f'(x) = \left(\frac{x - \ln x}{x + \ln x} \right)' = \frac{2(\ln x - 1)}{(x + \ln x)^2}, \forall x \geq 1.$

c) $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x) + 1)^2} = \frac{\ln x - 1}{2x^2}, \forall x \in [1, +\infty).$ Avem $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x - 1}{2x^2} = 0 \Rightarrow$ dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ la graficul funcției f .

2. a) Au loc succesiv egalitățile $\int_0^1 f'(x) dx = f(x) \Big|_0^1 = f(1) - f(0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2.$

b) $\int g(x) dx = \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx \stackrel{\substack{u(x) = x^2 + 1 \\ u'(x) = 2x}}{=} \int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + C = \ln \left| \underbrace{x^2 + 1}_{>0} \right| + C = \ln(x^2 + 1) + C = f(x) + C.$

c) $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)} dx = \int_1^2 f'(x) \cdot f^{-2}(x) dx = -\frac{1}{f(x)} \Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 5}.$