**Soluție**

**1.a)** Avem $\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{1-\ln 1}{1+\ln 1} = 1$.

**b)** $f'(x) = \left(\frac{x-\ln x}{x+\ln x}\right)' = \frac{2(\ln x - 1)}{(x+\ln x)^2},\ \forall x \geq 1$.

**c)** $g(x) = \frac{f'(x)}{(f(x)+1)^2} = \frac{\ln x - 1}{2x^2},\ \forall x \in [1, +\infty)$. Avem $\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x - 1}{2x^2} = 0 \Rightarrow$ dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală către $+\infty$ la graficul funcției *f*.

**2. a)** Au loc succesiv egalitățile $\int_0^1 f'(x)\,dx = f(x)\Big|_0^1 = f(1) - f(0) = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$.

**b)** $\int g(x)\,dx = \int \frac{2x}{x^2+1}\,dx \overset{u(x)=x^2+1}{\underset{u'(x)=2x}{=}} \int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln|u(x)| + \mathcal{C} = \ln\Big|\underbrace{x^2+1}_{>0}\Big| + \mathcal{C} = \ln(x^2+1) + \mathcal{C} = f(x) + \mathcal{C}$.

**c)** $\int_1^2 \frac{g(x)}{f^2(x)}\,dx = \int_1^2 f'(x)\cdot f^{-2}(x)\,dx = -\frac{1}{f(x)}\Big|_1^2 = \frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 5}$.