

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1.a) $f'(x) = \left(\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)' = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

b) Cum $f'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0.$ Din tabelul de variație al funcției obținem că f este crescătoare pentru $x \in [0; \infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty; 0].$

c) Din ipoteză $g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} + \frac{\frac{1}{x^2} - 1}{\frac{1}{x^2} + 1} = 0, \forall x \in \mathbb{R}^*.$ Deci $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) + g(x^2) + g(x^3) + \dots + g(x^{2009}) + x^{2010}}{x^{2009}} =$
 $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\overbrace{0 + 0 + \dots + 0}^{\text{de 2009 ori}} + x^{2010}}{x^{2009}} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$

2.a) $I_0 = \int_e^{e^2} x dx = \frac{e^4 - e^2}{2}.$

b) $x \in [e, e^2] \Rightarrow 1 \leq \ln x \leq 2 \Rightarrow x \cdot \ln^n x \leq x \cdot \ln^{n+1} x, \quad \forall x \in [e, e^2]$ și $\forall n \in \mathbb{N}.$ Integrând obținem $I_n \leq I_{n+1}.$

c) $I_n = \int_e^{e^2} x \cdot \ln^n x dx = \int_e^{e^2} \left(\frac{x^2}{2} \right)' \cdot \ln^n x dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln^n x \Big|_e^{e^2} - \int_e^{e^2} \frac{x^2}{2} \cdot (\ln^n x)' dx = \frac{e^4 \cdot 2^n}{2} - \frac{e^2}{2} - \frac{n}{2} \int_e^{e^2} x \cdot \ln^{n-1} x dx =$
 $= \frac{e^2 (e^2 \cdot 2^n - 1)}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1},$ oricare ar fi $n \in \mathbb{N}^*.$