Soluție

1.a) $f'(x)=\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}, \quad \forall x\in\mathbb{R}.$

b) Cum $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}, \forall x\in\mathbb{R}$. $f'(x)=0\Rightarrow x=0$. Din tabelul de variație al funcției obținem că f este crescătoare pentru $x\in[0;\infty)$ și descrescătoare pe $(-\infty;0]$.

c) Din ipoteză $g(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}+\frac{\frac{1}{x^2}-1}{\frac{1}{x^2}+1}=0, \forall x\in\mathbb{R}^*.$ Deci $\lim\limits_{x\to 0}\frac{g(x)+g\left(x^2\right)+g\left(x^3\right)+\ldots+g\left(x^{2009}\right)+x^{2010}}{x^{2009}}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\overbrace{0+0+\ldots+0}^{de\,2009\,ori}+x^{2010}}{x^{2009}}=\lim\limits_{x\to 0}x=0.$

2.a) $I_0=\int_e^{e^2}x\,dx=\frac{e^4-e^2}{2}$.

b) $x\in\left[e,e^2\right]\Rightarrow 1\le \ln x\le 2\Rightarrow x\cdot\ln^n x\le x\cdot\ln^{n+1}x, \ \forall x\in\left[e,e^2\right]$ şi $\forall n\in\mathbb{N}$. Integrând obținem $I_n\le I_{n+1}$.

c) $I_n=\int_e^{e^2}x\cdot\ln^n x\,dx=\int_e^{e^2}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln^n x\,dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln^n x\Big|_e^{e^2}-\int_e^{e^2}\frac{x^2}{2}\cdot\left(\ln^n x\right)'dx=\frac{e^4\cdot 2^n}{2}-\frac{e^2}{2}-\frac{n}{2}\int_e^{e^2}x\cdot\ln^{n-1}x\,dx=$

$=\frac{e^2\left(e^2\cdot 2^n-1\right)}{2}-\frac{n}{2}I_{n-1}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.