Soluție

1.a) $f'(x)=2x+\dfrac{2}{x^3},\ \forall x>0$.

b) Ecuația tangentei la graficul unei funcții în punctul $M\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$ este $d: y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$.
Pentru $x_0=1$, $f\left(x_0\right)=0$ şi $f'(1)=4$. Deci ecuația tangentei la G_f în punctul $A(1,0)\in G_f$ este $d: y=4(x-1)\Rightarrow d: 4x-y-4=0$.

c) Avem $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\left(x+\dfrac{1}{x^3}\right)}{x}=2\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\dfrac{1}{x^4}\right)=2.$

2.a) $F'(x)=(x-\ln x)'=1-\dfrac{1}{x}=f(x),\ \ \forall x>0\Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f.

b) $\displaystyle\int_1^2 F(x)\cdot f(x)\,dx \overset{\text{F primitivă} \Rightarrow}{\underset{F'(x)=f(x)}{=}} \int_1^2 F(x)\cdot F'(x)\,dx=\left.\frac{F^2(x)}{2}\right|_1^2=\frac{(2-\ln 2)^2-1}{2}.$

c) Pentru orice $x\in[1,e]$ rezultă că $\ln x\le 1\le x$. Deci $F(x)=x-\ln x\ge 0,\ \forall x\in[1,e]$.
Aria cerută va fi egală cu $\text{Aria}\left(\Gamma_F\right)=\displaystyle\int_1^e F(x)dx=\int_1^e (x-\ln x)dx=\frac{e^2-3}{2}$.

.