

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1.a) $f'(x) = 2x + \frac{2}{x^3}, \forall x > 0.$

b) Ecuația tangentei la graficul unei funcții în punctul $M(x_0, f(x_0))$ este $d: y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$

Pentru $x_0 = 1, f(x_0) = 0$ și $f'(1) = 4.$ Deci ecuația tangentei la G_f în punctul $A(1, 0) \in G_f$ este

$$d: y = 4(x - 1) \Rightarrow d: 4x - y - 4 = 0.$$

c) Avem $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\left(x + \frac{1}{x^3}\right)}{x} = 2 \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x^4}\right) = 2.$

2.a) $F'(x) = (x - \ln x)' = 1 - \frac{1}{x} = f(x), \forall x > 0 \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției $f.$

b) $\int_1^2 F(x) \cdot f(x) dx \stackrel{\substack{F \text{ primitivă} \Rightarrow \\ F'(x) = f(x)}}{=} \int_1^2 F(x) \cdot F'(x) dx = \frac{F^2(x)}{2} \Big|_1^2 = \frac{(2 - \ln 2)^2 - 1}{2}.$

c) Pentru orice $x \in [1, e]$ rezultă că $\ln x \leq 1 \leq x.$ Deci $F(x) = x - \ln x \geq 0, \forall x \in [1, e].$

$$\text{Aria cerută va fi egală cu } \text{Aria}(\Gamma_F) = \int_1^e F(x) dx = \int_1^e (x - \ln x) dx = \frac{e^2 - 3}{2}.$$

.