Soluție

1. a) $f'(x)=\left(x^{2010}+2010^x\right)'=2010\cdot x^{2009}+2010^x\ln 2010,\ x\in\mathbb{R}$.

b) $f''(x)=\left(f'(x)\right)'=2010\cdot 2009\cdot x^{2008}+2010^x\ln^2 2010$ şi cum $x^{2008}\geq 0;\ 2010^x>0;\ \ln^2 2008>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, rezultă de aici că $f''(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$, deci f este convexă pe $\mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)-f'(0)}{x}=f''(0)=\ln^2 2010$.

2. a) Avem $\int_1^e g(x)dx=\int_1^e \frac{1}{x}dx=\ln e-\ln 1=1$.

b) Integrând pe $[1,e]$ identitatea dată $f(x)=g(x)-\frac{x}{x^2+1}$ obținem $\int_1^e f(x)dx=\int_1^e\left(g(x)-\frac{x}{x^2+1}\right)dx=$

$=1-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$.

c) Integrând inegalitatea $f(x)\leq\frac{1}{2x^2}$ pe $[1,e]$ obținem $\int_1^e f(x)dx\leq\int_1^e\frac{1}{2x^2}dx\overset{\text{cf. b)}}{\Longrightarrow}$

$\Rightarrow 1-\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)\leq\frac{e-1}{2e}\Rightarrow 1-\frac{e-1}{2e}\leq\frac{1}{2}\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)\Rightarrow\frac{e+1}{e}\leq\ln\left(\frac{e^2+1}{2}\right)$.

.