

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) $f'(x) = (x^{2010} + 2010x)' = 2010 \cdot x^{2009} + 2010^x \ln 2010, x \in \mathbb{R}.$

b) $f''(x) = (f'(x))' = 2010 \cdot 2009 \cdot x^{2008} + 2010^x \ln^2 2010$ și cum $x^{2008} \geq 0$; $2010^x > 0$; $\ln^2 2008 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, rezultă de aici că $f''(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, deci f este convexă pe \mathbb{R} .

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x) - f'(0)}{x} = f''(0) = \ln^2 2010.$

2. a) Avem $\int_1^e g(x) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln e - \ln 1 = 1.$

b) Integrând pe $[1, e]$ identitatea dată $f(x) = g(x) - \frac{x}{x^2 + 1}$ obținem $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left(g(x) - \frac{x}{x^2 + 1} \right) dx =$
 $= 1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^2 + 1}{2} \right).$

c) Integrând inegalitatea $f(x) \leq \frac{1}{2x^2}$ pe $[1, e]$ obținem $\int_1^e f(x) dx \leq \int_1^e \frac{1}{2x^2} dx \xRightarrow{\text{cf. b)}} \Rightarrow$
 $\Rightarrow 1 - \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^2 + 1}{2} \right) \leq \frac{e-1}{2e} \Rightarrow 1 - \frac{e-1}{2e} \leq \frac{1}{2} \ln \left(\frac{e^2 + 1}{2} \right) \Rightarrow \frac{e+1}{e} \leq \ln \left(\frac{e^2 + 1}{2} \right).$

.