Soluție

1. a) Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=1\Rightarrow$ dreapta $d: y=1$ este asimptotă orizontală la G_f spre $-\infty$.

b) Avem $f'(x)=\left(\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\right)'=\dfrac{2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+x+1\right)^2},\ \forall x\in\mathbb{R}$.

c) $f'(x)=0\Rightarrow x_{1,2}=\pm1$. Din tabelul de variație rezultă că $\dfrac{1}{3}\le f(x)\le 1,\ \forall x\in[0;\infty)\Rightarrow\dfrac{1}{3}\le f\left(x^2\right)\le 1$ și $\dfrac{1}{3}\le f\left(x^4\right)\le 1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow\dfrac{2}{3}\le f\left(x^4\right)+f\left(x^2\right)\le 2,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

2. a) Avem $\int\limits_1^e f(x)dx=\int\limits_1^e\left(x-\dfrac{1}{x}\right)dx=\dfrac{e^2-3}{2}$.

b) O primitivă F a funcției f este convexă pe $(0,+\infty)$ $\Leftrightarrow F''(x)=f'(x)\ge 0,\forall x>0$. Avem $F''(x)=f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}\ge 0,\ \forall x>0$.

c) $h(x)=f\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{1}{x}-x=-g(x)\Rightarrow V\left(C_h\right)=\pi\int\limits_1^e h^2(x)dx=\pi\int\limits_1^e\left(-g(x)\right)^2dx=\pi\int\limits_1^e g^2(x)dx=V\left(C_g\right)$.