

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**  
**Soluție**

1. a) Deoarece  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} = 1 \Rightarrow$  dreapta  $d: y = 1$  este asimptotă orizontală la  $G_f$  spre  $-\infty$ .

b) Avem  $f'(x) = \left( \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + x + 1} \right)' = \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + x + 1)^2}, \forall x \in \mathbb{R}$ .

c)  $f'(x) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 1$ . Din tabelul de variație rezultă că  $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1, \forall x \in [0; \infty) \Rightarrow \frac{1}{3} \leq f(x^2) \leq 1$  și

$\frac{1}{3} \leq f(x^4) \leq 1, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{2}{3} \leq f(x^4) + f(x^2) \leq 2, \forall x \in \mathbb{R}$ .

2. a) Avem  $\int_1^e f(x) dx = \int_1^e \left( x - \frac{1}{x} \right) dx = \frac{e^2 - 3}{2}$ .

b) O primitivă  $F$  a funcției  $f$  este convexă pe  $(0, +\infty) \Leftrightarrow F''(x) = f'(x) \geq 0, \forall x > 0$ . Avem

$F''(x) = f'(x) = 1 + \frac{1}{x^2} \geq 0, \forall x > 0$ .

c)  $h(x) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - x = -g(x) \Rightarrow V(C_h) = \pi \int_1^e h^2(x) dx = \pi \int_1^e (-g(x))^2 dx = \pi \int_1^e g^2(x) dx = V(C_g)$ .