

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1. a) Avem $f'(x) = ((x-1)e^x)' = e^x + (x-1)e^x = xe^x = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x) = 0$; deci dreapta $d: y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la G_g .

c) Din punctul a) avem relația $f'(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$. Prin derivare obținem:

$f''(x) = g'(x), \forall x \in \mathbb{R}$. $f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow g'(x) \geq 0$, deci f este convexă $\Leftrightarrow g$ crescătoare.

2. a) $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{1 - \ln x}{x^2} = g(x) \Rightarrow f$ este primitivă a lui g .

$$\text{b) } \int_1^e f(x) \cdot g(x) dx \stackrel{f'(x)=g(x)}{=} \int_0^1 f(x) \cdot f'(x) dx = \left. \frac{f^2(x)}{2} \right|_1^e = \frac{1}{2e^2}.$$

$$\text{c) } \int_1^a \frac{\ln x}{x} dx = 2 \Rightarrow \int_1^a \ln x \cdot (\ln x)' dx = 2 \Rightarrow \left. \frac{\ln^2 x}{2} \right|_1^a = 2 \Rightarrow \ln^2 a = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln a = \pm 2 \Rightarrow \begin{array}{l} \nearrow \ln a = 2 \Rightarrow a_1 = e^2 \in [1, +\infty) \\ \searrow \ln a = -2 \Rightarrow a_2 = e^{-2} \notin [1, +\infty) \end{array}. \text{ Deci } a = e^2.$$