Soluție

1. a) $l_s(1) = l_d(1) = f(1) = 1 \Rightarrow f$ este continuă în $x_0 = 1$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1+\ln x}{x} = 0$.

c) $f'(x) = \begin{cases} 2x-1, & x \in (0;1) \\ \frac{1}{x}, & x \in [1;\infty) \end{cases}$, $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. Din tabelul de variație al funcției $f \Rightarrow f(x) \geq \frac{3}{4}$, $\forall x \in (0;\infty)$.

2. a) $\int_1^2 f(x)dx = \int_1^2 \left(x^2 + \frac{2}{x}\right)dx = \frac{7}{3} + 2\ln 2$.

b) $\int_1^2 g(x)dx = \int_1^2 x\ln x dx = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

c) Dacă presupunem că $f(x) \leq g(x) + 3$, $\forall x \in (1;2)$, atunci $\int_1^2 f(x)dx \leq \int_1^2 g(x)dx + 3 \Rightarrow 2\ln 2 + \frac{7}{3} \leq 2\ln 2 + \frac{11}{4}$, fals, deci există $x_0 \in (1;2)$ astfel încât $f(x_0) > g(x_0)$.