

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**  
**Soluție**

1. a)  $f'(x) = (x - 2 \ln x)' = \frac{x-2}{x}, \forall x \geq 1$ .

b)  $f'(x) = \frac{x-2}{x} = 0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2 \in [1, +\infty)$ . Din tabelul de variație rezultă că  $f$  este descrescătoare pe intervalul  $[1, 2]$  și crescătoare pe intervalul  $[2, +\infty)$ .

c) Din  $1 \leq x \leq x^2 \leq 2$  și monotonia funcției  $f$  obținem  $f(x) \geq f(x^2)$ , adică  $x - 2 \ln x \geq x^2 - 2 \ln x^2$ .

Rezultă  $f(2009) \leq f(2010) \Leftrightarrow 2009 - 2 \ln 2009 \leq 2010 - 2 \ln 2010 \Leftrightarrow \ln \frac{2010}{2009} \leq \frac{1}{2}$ .

2. a)  $I_0 = \int_2^3 \frac{1}{x^2 - 1^2} dx = \frac{1}{2 \cdot 1} \ln \left| \frac{x-1}{x+1} \right| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \left( \ln \frac{2}{4} - \ln \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$ .

b)  $I_1 = \int_2^3 \frac{x}{x^2 - 1} dx = \frac{1}{2} \int_2^3 \frac{2x}{x^2 - 1} dx \stackrel{u(x)=x^2-1}{=} \frac{1}{2} \int_{u'(x)=2x}^{\frac{u(x)=x^2-1}{u'(x)=2x}} \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \frac{1}{2} \ln |u(x)| \Big|_2^3 = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{3}$ .

c)  $I_{n+2} - I_n = \int_2^3 \frac{x^{n+2}}{x^2 - 1} dx - \int_2^3 \frac{x^n}{x^2 - 1} dx = \int_2^3 \frac{x^n (x^2 - 1)}{x^2 - 1} dx = \int_2^3 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big|_2^3 = \frac{3^{n+1} - 2^{n+1}}{n+1}$ .