Soluție

1. a) $f'(x)=(x-2\ln x)'=\dfrac{x-2}{x}, \forall x\geq 1$.

b) $f'(x)=\dfrac{x-2}{x}=0 \Rightarrow x-2=0 \Rightarrow x=2\in[1,+\infty)$. Din tabelul de variație rezultă că f este descrescătoare pe intervalul $[1,2]$ şi crescătoare pe intervalul $[2,+\infty)$.

c) Din $1\leq x\leq x^2\leq 2$ şi monotonia funcției *f* obținem $f(x)\geq f\left(x^2\right)$, adică $x-2\ln x\geq x^2-2\ln x^2$.

Rezultă $f(2009)\leq f(2010) \Leftrightarrow 2009-2\ln 2009\leq 2010-2\ln 2010 \Leftrightarrow \ln\dfrac{2010}{2009}\leq\dfrac{1}{2}$.

2. a) $I_0=\displaystyle\int_2^3\frac{1}{x^2-1^2}\,dx=\frac{1}{2\cdot 1}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|\Bigg|_2^3=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{2}{4}-\ln\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}.$

b) $I_1=\displaystyle\int_2^3\frac{x}{x^2-1}\,dx=\frac{1}{2}\int_2^3\frac{2x}{x^2-1}\,dx \overset{u(x)=x^2-1}{\underset{u'(x)=2x}{=}} \frac{1}{2}\int_2^3\frac{u'(x)}{u(x)}\,dx=\frac{1}{2}\ln|u(x)|\Big|_2^3=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{3}.$

c) $I_{n+2}-I_n=\displaystyle\int_2^3\frac{x^{n+2}}{x^2-1}dx-\int_2^3\frac{x^n}{x^2-1}dx=\int_2^3\frac{x^n\left(x^2-1\right)}{x^2-1}dx=\int_2^3 x^n\,dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Bigg|_2^3=\frac{3^{n+1}-2^{n+1}}{n+1}.$