

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar
Soluție

1.a) $f'(x) = \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x^2}, \forall x > 0.$

b) $f'(x) \frac{-2x-1}{x(x+1)} \leq 0, \forall x \in (0; \infty) \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0; \infty).$

Dacă $x \in (1; \infty), \sqrt{x} < x \Rightarrow f(\sqrt{x}) \geq f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{x}+1} \geq f(x),$ oricare ar fi $x \in (1; +\infty).$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x f(x) f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \frac{1}{x(x+1)} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{x}+1\right)} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x+1)^2} = 1.$

2. a) $I_0 + I_2 = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2(x^2+1)} \right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{x} \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}}.$

b) $I_1 = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}.$

c) $I_n + I_{n-2} = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{x^n(x^2+1)} + \frac{1}{x^{n-2}(x^2+1)} \right) dx = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^n} dx = \frac{x^{-n+1}}{-n+1} \Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{1}{n-1} \left(1 - \frac{1}{(\sqrt{3})^{n-1}} \right), \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$