Soluție

1. a) $f'(x) = \left((x-2)\ln x\right)' = \ln x + \dfrac{x-2}{x}, \forall x > 0$.

b) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{f(x) - f(1)}{x-1} = f'(1) = -1$.

c) Funcția f' este crescătoare pe $(0, +\infty) \Leftrightarrow \left(f'(x)\right)' \geq 0, \forall x > 0 \Leftrightarrow f''(x) \geq 0, \forall x > 0$.

Cum $f''(x) = \left(\ln x + \dfrac{x-2}{x}\right)' = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x+2}{x^2} > 0, \forall x > 0 \Rightarrow f' \nearrow$ pe $(0, +\infty)$.

2. a) Deoarece $f'(x) = \left(\sqrt{x} + \ln x\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{\sqrt{x}+2}{2x} = g(x), \forall x > 0$,

rezultă că funcția f este o primitivă a funcției g.

b) $\int_1^4 f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_1^4 f(x) \cdot f'(x)\, dx = \left.\dfrac{f^2(x)}{2}\right|_1^4 = \dfrac{(2+\ln 4)^2 - 1}{2}$.

c) $\int_1^4 g(x) \cdot f''(x)\, dx = \int_1^4 g(x) \cdot g'(x)\, dx = \left.\dfrac{g^2(x)}{2}\right|_1^4 = -1$.