Soluție

1. a) Avem: $\left.\begin{array}{l} f_s(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} e^x=1 \\ f_d(0)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\left(1+\sqrt{x}\right)=1 \\ f(0)=1+\sqrt{0}=1 \end{array}\right\}\Rightarrow$ funcția f este continuă în $x_0=0$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=e^{-\infty}=0$. Deci dreapta $d: y=0$ este asimptotă orizontală la G_f către $-\infty$.

c) Funcția f este concavă pe $(0,+\infty)$ dacă $f''(x)<0, \forall x>0$. $f'(x)\overset{\text{pentru } x>0}{=}\left(1+\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$ și

$f''(x)\overset{\text{pentru } x>0}{=}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'=-\frac{1}{4x\sqrt{x}}<0$, pentru orice $x>0$, rezultă că f este concavă pe $(0,+\infty)$.

2. a) Deoarece $f\left(\sqrt{x}\right)=e^{\left(\sqrt{x}\right)^2}=e^x, \forall x\geq 0 \Rightarrow \int f\left(\sqrt{x}\right)dx=\int e^x\,dx=e^x+\mathcal{C}$.

b) $\int\limits_0^1 f(x)\cdot g(x)dx=\int\limits_0^1 x\cdot e^{x^2}\,dx \underset{u'(x)=2x}{\overset{u(x)=x^2}{=}} \frac{1}{2}\int\limits_0^1 u'(x)\cdot e^{u(x)}\,dx=\frac{1}{2}e^{u(x)}\Big|_0^1=\frac{e-1}{2}$.

c) $f(50)=e^{x^{100}} \Rightarrow \int\limits_0^1 e^{x^{100}}\cdot x^{99}dx=\frac{1}{100}\int\limits_0^1 e^{u(x)}\cdot u'(x)dx=\frac{e-1}{100}$, unde $u(x)=x^{100}$.