Soluție

1.a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=g'(2)$ și $g'(x)=\frac{2-x}{e^x}\Rightarrow g'(2)=0$.

b) $f'(x)=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ și din tabelul de variație al funcției *f* $\Rightarrow x=0$ este punct de minim al funcției *f*.

c) Din tabelul de variație al funcției *f*, $f(x)\geq -1,\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow -f(x)\leq 1$.Din tabelul de variație al funcției *g*, $g(x)\leq\frac{1}{e^2},\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow g(x)-f(x)\leq 1+\frac{1}{e^2}$.

2.a) $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\ln 2$.

b) $\int_0^1 g(x)dx=\left(x+\ln\left|x^2+1\right|\right)\Big|_0^1=1+\ln 2$.

c) Presupunem că nu există $x_0\in(0;1)$ astfel încât $f(x_0)\leq g(x_0)-2x_0\Rightarrow\int_0^1 f(x)dx>\int_0^1 g(x)dx-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\ln 2>1+\ln 2$, fals, deci există $x_0\in(0;1)$ astfel încât $f(x_0)\leq g(x_0)$.