Soluție

1.a) $f'(x)=1-\frac{1}{x}$.

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}=0 \Leftrightarrow x=1$.Din tabelul de variație al funcției $\Rightarrow$ pe intervalul $(0;1]$ f este descrescătoare, iar pe intervalul $[1;\infty)$ f este crescătoare.

c) Din punctul **b)** $\Rightarrow f(x)\geq f(1)=1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty) \Leftrightarrow x-\ln x\geq 1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty) \Leftrightarrow$ $x\geq \ln x+1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty)$ pentru $x\in(0,\infty)\Rightarrow \sqrt{x}\in(0,\infty)\Rightarrow \sqrt{x}\geq \ln\sqrt{x}+1$ oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

2.a) $\int_0^x (t^2+t+1)\,dt=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+x \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\int_0^x (t^2+t+1)\,dt}{x^3+1}=\frac{1}{3}$.

b) $\int \frac{1}{x^2}\,dx=\frac{-1}{x}+\mathcal{C}$; $F(1)=0\Leftrightarrow -1+\mathcal{C}=0\Leftrightarrow \mathcal{C}=1\Rightarrow F(x)=\frac{x-1}{x}$.

c) $V=\pi\int_0^1 a^2x^4\,dx=\pi\frac{a^2}{5}=5\pi \Rightarrow a=5$.