

Soluție

1.a) $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \Rightarrow h'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$. Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă către $+\infty$ la graficul funcției f .

c) $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}; h'(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \geq 0$ oricare ar fi $x \in [0, \infty) \Rightarrow h$ crescătoare pe intervalul $[0, \infty)$.

2.a) $\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+3} + 1 = \frac{(x+3) - (x+1) + (x+1)(x+3)}{(x+1)(x+3)} = \frac{x^2+4x+5}{x^2+4x+3} = f(x) \Rightarrow \int_0^1 (x^2+4x+5) dx = \frac{22}{3}$.

b) $\int_0^1 f(x) dx = \left(\ln \frac{x+1}{x+3} + x \right) \Big|_0^1 = \ln \frac{3}{2} + 1$.

c) $f(x) > 0$ oricare ar fi $x \geq 0 \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_f) = \int_0^k f(x) dx = \left(\ln \frac{x+1}{x+3} + x \right) \Big|_0^k = \ln \left(\frac{k+1}{k+3} \cdot \frac{3}{1} \right) + k = k + \ln k$

$\Rightarrow \frac{3k+3}{k+3} = k \Leftrightarrow 3k+3 = k^2+3k \Rightarrow k = \sqrt{3}$.