Soluție

1.a) $f'(x)=\frac{1}{x}+x.$

b) $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2.$

c) $f''(x)=\frac{-1+x^2}{x^2}$; $f''(x)=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-1\notin(0;+\infty)$. Din tabelul de variație $\Rightarrow$ pentru $x\in(0,1)$ f este concavă; pentru $x\in(1,\infty)$ f este convexă.

2.a) Pentru $n=2\Rightarrow\int_1^2(1+x)^2\,dx=\left.\frac{(1+x)^3}{3}\right|_1^2=\frac{19}{3}$.

b) Pentru $n=-1\Rightarrow\int_0^a(1+x)^{-1}\,dx=\ln|1+x|\Big|_0^a=0\Leftrightarrow|1+a|=1\Rightarrow a_1=0, a_2=-2\notin[0,+\infty)$. Deci $a=0$.

c) $\int_0^1 f'(x)\cdot f(x)\,dx=\left.\frac{1}{2}(1+x)^{2n}\right|_0^1=\frac{2^{2n}}{2}-\frac{1}{2}.$