

Soluție

1.a) Avem $f_1(x) = f_0'(x) = \frac{1}{x}$.

b) $f_2(x) = f_1'(x) = -\frac{1}{x^2}$; $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = 0 \Rightarrow y = 0$ asimptotă orizontală.

c) $f_0(x) \leq \frac{1}{f_1(x)} - 1 \Leftrightarrow \ln x \leq x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x \leq -1$. Atașăm funcția $h(x) = \ln x - x, x \in (0, \infty)$;

$h'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}, h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$. Din tabelul de variație $\Rightarrow h(x) \leq -1, \forall x \in (0, \infty) \Leftrightarrow \ln x - x \leq -1$.

2.a) $\int_0^{\sqrt{e-1}} f(x) dx = \ln(1+x^2) \Big|_0^{\sqrt{e-1}} = 1$.

b) F primitivă $\Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$; $F'(x) > 0$ pentru orice $x \in (0, \infty) \Rightarrow F$ crescătoare pe $(0, \infty)$.

c) $\int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx = \ln 5$; $\int_2^3 f(x) dx + \int_3^4 f(x) dx = \int_2^4 f(x) dx = \ln \frac{17}{5}$.