

Soluție

1.a) $f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{x^2}$.

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 0$.

c) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 1, x_2 = -1$. Din tabelul de variație rezultă f crescătoare pe $(-\infty, -1]$ și pe $[1; \infty)$ și f descrescătoare pe $[-1; 0]$ și pe $(0; 1]$.

2.a) $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^1 x^2 (2 - x^2) dx = \pi \left(\frac{2x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^1 = \frac{7\pi}{15}$.

b) $\int_0^1 x \sqrt{2 - x^2} dx = \int_2^1 -\frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \int_1^2 \frac{1}{2} \sqrt{t} dt = \frac{2\sqrt{2} - 1}{3}$.

c) $\int_0^x f(t) dt = F(x) - F(0)$, unde F este o primitivă a funcției f ,

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F'(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{2x} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$