Soluții

1. a) $f'(x)=1-\dfrac{1}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1,\ \lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)-x\right)=1$, deci $y=x+1$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) Din tabelul de variație $f(x)\geq 4,\ \forall x\in(1;\infty)$.

2. a) $\int f_0(x)dx=\int\dfrac{e^x}{2}dx=\dfrac{e^x}{2}+\mathcal{C}$.

b) $f_1(x)>0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_{f_1}\right)=\int_0^1\dfrac{e^x}{e^x+1}dx=\ln\left(e^x+1\right)\Big|_0^1=\ln\left(\dfrac{e+1}{2}\right)$.

c) Din $e^{(n+1)x}\geq e^{nx}>0$, pentru orice $x\in[0,1]$, se obține $\dfrac{e^x}{e^{(n+1)x}+1}\leq\dfrac{e^x}{e^{nx}+1}$ pentru orice $x\in[0,1]$, de unde $\int_0^1 f_{n+1}(x)dx\leq\int_0^1 f_n(x)dx$ pentru orice $n\in\mathbb{N}$.