Soluții

1. a) $f'(x) = 2\frac{1}{2\sqrt{x}} - 3\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ **,** pentru orice $x > 0$ **.**

b) Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = -1$.

c) Din studiul semnului derivatei funcției f se deduce că f este descrescătoare pe $(0,1]$ şi crescătoare pe $[1,+\infty)$, de unde rezultă că $f(x) \geq f(1) = -1$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$.

2. a) $F'(x) = 2x+1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, de unde $a = 2$.

b) $\int_0^1 e^x \cdot f_1(x)\,dx = xe^x \Big|_0^1 = e$.

c) $\int_0^1 f_a^{\,2}(x)\,dx = \int_0^1 \left(a^2x^2 + 2ax + 1\right)dx = \left(a^2\frac{x^3}{3} + ax^2 + x\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left[\left(a + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right] \geq \frac{1}{4}$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.