

Soluții

1. a) $f'(x) = \frac{2x^2 - (x^2 + 1)}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2}$, pentru orice $x > 0$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = 0$ deci $y = x$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) $f''(x) = \frac{2}{x^3} > 0$, pentru orice $x > 0$, deci f este convexă pe $(0, +\infty)$.

2. a) $\int f(x) dx = e^x + C$.

b) $h(x) = xe^x \geq 0$, $\forall x \in [0; 1] \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_h) = \int_0^1 xe^x dx = (x-1)e^x \Big|_0^1 = 1$.

c) $V = \pi \int_0^1 (e^x + e^{-x})^2 dx = \pi \left(\frac{e^{2x}}{2} + 2x - \frac{e^{-2x}}{2} \right) \Big|_0^1 = \pi \left(\frac{e^2}{2} + 2 - \frac{1}{2e^2} \right)$.