

**Soluții**

1. a)  $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$ , pentru orice  $x > 0$

b) Ecuația tangentei este  $y - f(e) = f'(e)(x - e)$ , adică  $y = \frac{1}{e}$ .

c) Din studiul semnului derivatei lui  $f$  se obține că  $f$  este crescătoare pe  $(0, e]$  și descrescătoare pe  $[e, +\infty)$ , deci  $f(x) \leq f(e) = \frac{1}{e}$ , pentru orice  $x > 0$ , de unde concluzia.

2. a)  $\int f(x) dx = x - \frac{2x\sqrt{x}}{3} + C$ .

b)  $V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \left( x - \frac{4x\sqrt{x}}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{6}$ .

c)  $\int_0^1 f^{2009}(x) dx \leq \int_0^1 (1-x)^{2009} dx = \frac{-(x-1)^{2010}}{2010} \Big|_0^1 = \frac{1}{2010}$ .