

Soluții

1. a) $f'(x) = 3x^2 - 3$, $f'(1) = 0$.

b) $f''(x) = 6x$ și atunci f este concavă pe $(-\infty, 0]$ și convexă pe $[0, +\infty)$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se obține că f este crescătoare pe $(-\infty, -1]$, descrescătoare pe $[-1, 1]$ și crescătoare pe $[1, 2]$ și cum $f(-1) = f(2) = 3$ rezultă $f(x) \leq 3$, pentru orice $x \leq 2$.

2. a) $F'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = f(x)$ pentru orice $x > 0$.

b) $f(x) > 0, \forall x \in [1; 2] \Rightarrow \text{Aria}(\Gamma_f) = \int_1^2 f(x) dx = F(x) \Big|_1^2 = \frac{1}{2}$.

c) $\int_1^e F(x) \cdot \ln x dx = \int_1^e \left(x \ln x + \frac{\ln x}{x} \right) dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big|_1^e + \frac{x^2 \ln x}{2} \Big|_1^e - \frac{x^2}{4} \Big|_1^e = \frac{e^2 + 3}{4}$.