Soluții

1. a) $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-1}{x}$, pentru orice $x > 0$.

b) Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y = 2$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se deduce că f este descrescătoare pe $[0,1]$ și crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x) \geq f(1) = 2$, $\forall x > 0$, de unde concluzia.

2. a) $\int f_2(x)dx = \int\left(2x^2 - 2x + 1\right)dx = \frac{2x^3}{3} - x^2 + x + \mathcal{C}$.

b) $e^x f_2(x) = \left[x^2 + (1-x)^2\right] \cdot e^x \geq 0,\ \forall x \in [0;1] \Rightarrow$ Aria $= \int_0^1 \left(2x^2 - 2x + 1\right)e^x dx = \left(2x^2 - 6x + 7\right)e^x \Big|_0^1 = 3e - 7$.

c) $x^n \geq x^{n+1}$ şi $(1-x)^n \geq (1-x)^{n+1}$ pentru orice $x \in [0,1]$, de unde, prin însumare şi integrare se obține că $\int_0^1 f_n(x)dx \geq \int_0^1 f_{n+1}(x)dx$.