Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{e^x x-e^x}{x^2}=\dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$, pentru orice $x>0$.

b) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)=+\infty$, deci $x=0$ este asimptotă verticală.

c) Din studiul semnului derivatei lui f se obține că f este descrescătoare pe $(0,1]$ şi crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\geq f(1)=e$, pentru orice $x>0$, de unde concluzia.

2. a) $\int f(x)dx=\dfrac{x^2}{2}+2\ln x+\mathcal{C}$.

b) $V=\pi\int\limits_1^2\left(x+\dfrac{2}{x}\right)^2 dx=\pi\left(\dfrac{x^3}{3}+4x-\dfrac{4}{x}\right)\Bigg|_1^2=\dfrac{25\pi}{3}$

c) $\int\limits_1^2 f(x)\ln x dx=\int\limits_1^2 x\cdot\ln x dx+\int\limits_1^2\dfrac{2}{x}\ln x dx=\left(\dfrac{x^2}{2}\ln x-\dfrac{x^2}{4}+\ln^2 x\right)\Bigg|_1^2=\ln^2 2+2\ln 2-\dfrac{3}{4}$.