Soluții

1. a) $f'(x) = e^x + x \cdot e^x = (x+1) \cdot e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) $f''(x) = (x+2) \cdot e^x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$ şi din semnul derivatei a doua se obține că f este concavă pe $(-\infty, -2]$ şi convexă pe $[-2, +\infty)$.

c) $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{e^{-x}} = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(-\dfrac{1}{e^{-x}}\right) = 0$, deci $y = 0$ este asimptotă orizontală la $-\infty$.

2. a) $\int x \cdot f_1(x)\,dx = \int 2x\,dx = x^2 + \mathcal{C}$.

b) $\int_0^1 f_2(x)\,dx = \int_0^1 \left(x + \dfrac{2}{x+1}\right)dx = \left(\dfrac{x^2}{2} + 2\ln(x+1)\right)\Bigg|_0^1 = \dfrac{1}{2} + 2\ln 2$.

c) Din $0 \le \dfrac{x^{2009} + x + 2}{x+1} \le \dfrac{2x+2}{x+1}$, pentru orice $x \in [0,1]$ se obține $\text{Aria}\left(\Gamma_{f_{2009}}\right) = \int_0^1 f_{2009}(x)\,dx \le \int_0^1 2\,dx$,

adică $\text{Aria}\left(\Gamma_{f_{2009}}\right) \le 2$.