Soluții

1. a) $f'(x)=\dfrac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\dfrac{x^2-2x}{(x-1)^2}$, pentru orice $x>1$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=1$, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=1$, deci $y=x+1$ este asimptotă oblică la $+\infty$.

c) Din studiul semnului derivatei lui f rezultă că f este descrescătoare pe intervalul $(1,2]$ şi atunci $f\left(\sqrt[3]{2}\right)\geq f\left(\sqrt[3]{3}\right)$.

2. a) $\int f(x)dx=x-\dfrac{x^2}{2}+\mathcal{C}$.

b) $g(x)\geq 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow \text{Aria}\left(\Gamma_g\right)=\int\limits_0^1\sqrt{1-x}dx=-\int\limits_0^1(1-x)'\cdot(1-x)^{\frac{1}{2}}dx=-\dfrac{2}{3}\sqrt{(1-x)^3}\Big|_0^1=\dfrac{2}{3}$.

c) $\int\limits_{\frac{1}{e}}^{1}f(x)\cdot\ln x dx=\left(\left(x-\dfrac{x^2}{2}\right)\ln x-x+\dfrac{x^2}{4}\right)\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{1}=\dfrac{-3e^2+8e-3}{4e^2}$.