Soluții

1. a) $f'(x)=1-3\cdot\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$, pentru orice $x>0$.

b) $d: y-f(1)=f'(1)(x-1)$, ecuația tangentei este $y=0$.

c) Din studiul semnului derivatei funcției f se obține că f este descrescătoare pe $(0,1]$ și crescătoare pe $[1,+\infty)$, deci $f(x)\ge f(1)=0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$ de unde concluzia.

2. a) $\int_0^1 (x+1)f(x)dx=\int_0^1 x^3dx=\left.\dfrac{x^4}{4}\right|_0^1=\dfrac{1}{4}$.

b) $f(x)\ge 0,\ \forall x\in[0;1]\Rightarrow$ Aria$\left(\Gamma_f\right)=\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-x+1-\dfrac{1}{x+1}\right)dx=\left.\left(\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^2}{2}+x-\ln(x+1)\right)\right|_0^1=\dfrac{5}{6}-\ln 2$.

c) Din $1\le(x+1)^2\le 4$ se obține $\dfrac{x^6}{4}\le\dfrac{x^6}{(x+1)^2}\le x^6$, pentru orice $x\in[0,1]$ și atunci $V=\pi\int_0^1\dfrac{x^6}{(x+1)^2}dx\in\left[\dfrac{\pi}{28},\dfrac{\pi}{7}\right]$.