

Soluție

1. $z^2 = \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \frac{1-2i\sqrt{3}-3}{4} = \frac{-1-i\sqrt{3}}{2} = \bar{z}.$

2. Considerăm funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -x^2 + 4x - 3$. Tabelul de semn al lui g este:

x	$-\infty$	1	3	∞					
$g(x)$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$

$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 3].$

$$g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [1; 3].$$

3. Avem $f(x) = f(y) \Rightarrow \frac{x^2+1}{x} = \frac{y^2+1}{y} \Rightarrow (x-y)(xy-1) = 0 \Rightarrow x = y$ sau $xy = 1$.

Dar $x, y \in (1, \infty) \Rightarrow xy > 1$. Avem $\begin{cases} x, y \in (1, \infty) \\ f(x) = f(y) \end{cases} \Rightarrow x = y$, deci f este injectivă.

4. O funcție $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{0, 1, 2, 3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par este unic determinată de un tabel de tipul

x	1	2	3	
$f(x)$	a	b	c	

unde $a \in \{0, 2\}$ iar $b, c \in \{0, 1, 2, 3\}$.

Vor fi $2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$ funcții cu proprietatea cerută.

5. Din teorema cosinusului, avem $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos A$.

$$\text{Atunci } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \cdot AC \cos A = \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2} = \frac{5}{2}.$$

6. $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ) = \sin 45^\circ \cdot \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \cdot \sin 30^\circ$

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$